

Camelia-Maria Chindriș

Nicolae Apetrei

MATEMATICĂ STANDARD

Algebră • Geometrie

Clasa a VI-a

Partea I. Modulele 1, 2

EDITURA
COMPER

Cuprins

Teste de evaluare inițială	3
----------------------------------	---

ALGEBRĂ

Capitolul 1. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE.....	5
Lecția 1. Descriere, notații, reprezentări. Mulțimi numerice și nenumerice. Relația dintre un element și o mulțime.....	5
Lecția 2. Relații între mulțimi.....	11
Lecția 3. Mulțimi finite. Cardinalul unei mulțimi finite. Mulțimi infinite. Mulțimea numerelor naturale	14
Lecția 4. Operații cu mulțimi: reuniune, intersecție, diferență	18
<i>Test de autoevaluare</i>	24
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	25
Lecția 5. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime.....	26
Lecția 6. Cel mai mare divizor comun. Numere prime între ele.....	31
Lecția 7. Cel mai mic multiplu comun	35
Lecția 8. Proprietăți ale divizibilității în \mathbb{N}	39
<i>Test de autoevaluare</i>	43
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	44
Capitolul 2. RAPOARTE ȘI PROPORȚII	45
Lecția 1. Rapoarte. Procente	45
Lecția 2. Proporții. Proprietatea fundamentală a proporțiilor	50
Lecția 3. Proporții derivate. Șiruri de rapoarte egale	56
Lecția 4. Mărimi direct proporționale. Regula de trei simplă.....	62
Lecția 5. Mărimi invers proporționale. Regula de trei simplă	67
Lecția 6. Elemente de organizare a datelor. Reprezentarea datelor prin grafice în contextul proporționalității. Reprezentarea datelor cu ajutorul unor softuri matematice	71
Lecția 7. Probabilități.....	78
<i>Test de autoevaluare</i>	83
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	84

GEOMETRIE

CAPITOLUL 3. NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE	86
Lecția 1. Unghiuri adiacente. Bisectoarea unui unghi	86
Lecția 2. Unghiuri complementare. Unghiuri suplementare.....	91
Lecția 3. Unghiuri opuse la vârf	95
Lecția 4. Unghiuri formate în jurul unui punct	99
Lecția 5. Unghiuri determinate de două drepte cu o secantă. Drepte paralele. Criterii de paralelism	102

<i>Test de autoevaluare</i>	103
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	109
Lecția 6. Drepte perpendiculare în plan. Distanța de la un punct la o dreaptă ..	111
Lecția 7. Mediatoarea unui segment	115
Lecția 8. Cercul. Elemente în cerc. Unghi la centru	119
Lecția 9. Pozițiile unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri.....	124
<i>Test de autoevaluare</i>	128
Recapitulare și sistematizare prin teste.....	129
PROBLEME RECAPITULATIVE	133
Modele de teste pentru Evaluarea Națională	136
Probleme pregătitoare pentru concursuri.....	139
SOLUȚII	142

Teste de evaluare inițială

TESTUL 1

• Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

- 1p** 1. Calculați $(3^2)^4 : 9^3 - (25^2 \cdot 5^3) : 5^6$.
- 1p** 2. Calculați $\left[\frac{2}{3} + 0, (3)\right] : \frac{9}{5}$.
- 1p** 3. Determinați suma numerelor naturale care împărțite la 3 dau câtul 16.
- 1p** 4. Arătați că $(1 + 2 + 3 + \dots + 2023) : 17^2$.
5. Într-un bloc sunt 45 de apartamente, unele cu 3 camere și altele cu o cameră, în total 87 de camere.
- 1p** a) Aflați câte apartamente cu 3 camere sunt.
- 1p** b) Aflați câte apartamente cu o cameră sunt.
- 1p** 6. Scrieți sub formă de fracții ordinare ireductibile următoarele fracții zecimale:
- a) 0,3; b) 1,52; c) 1,(2); d) 2,3(5).
7. Se consideră segmentul AE de lungime 17 cm și pe acesta punctele B, C, D , în această ordine. Se știe că $AB = 6$ cm, $AC = 9$ cm și $BD = 6$ cm.
- 1p** a) Arătați că D este simetricul lui B față de C .
- 1p** b) Calculați lungimea segmentului DE .

TESTUL 2

• Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

- 1p** 1. Calculați $1,5 \cdot 3,2 - (4,6 + 8,2) : 4$.
- 1p** 2. Determinați cel mai mic număr de forma $\overline{3ab3}$ cu suma cifrelor 9.
- 1p** 3. Determinați ultima cifră a numărul $a = 2025^{100} + 19^{81} + 27^{302}$.
- 1p** 4. Determinați numerele naturale x pentru care fracția $\frac{3x+1}{2x+5}$ este subunitară.
- 1p** 5. Calculați media aritmetică a numerelor $a = 2,5 + 3,72$ și $b = 5 - 1,46$.
- 1p** 6. Un telefon costă 3600 lei. Aflați prețul telefonului după două scumpiri succesive, una de 20% și alta de 25%.

7. Se consideră punctele coliniare A, O, B și semidreapta $[OC$, astfel încât $\sphericalangle AOC = 5 \cdot \sphericalangle BOC$.

1p a) Calculați măsura unghiului BOC .

1p b) Calculați măsura unghiului BOM , unde $[OM$ este semidreapta opusă lui $[OC$.

1p 8. Calculați perimetrul unui dreptunghi care are aria 175 cm^2 și lățimea este o șeptime din lungime.

TESTUL 3

• Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

1p 1. Arătați că numărul $4 \cdot 5^{17} + 5^{17}$ este cub perfect.

1p 2. Efectuați $[1, (4) - 0, (2)]: 22 + \frac{1}{9}$.

1p 3. Determinați numărul de 14 ori mai mic decât produsul numerelor 343 și 50.

1p 4. Ordonăți crescător numerele $a = 7^{300}$, $b = 5^{400}$, $c = 3^{500}$.

1p 5. Determinați numerele de forma \overline{xyz} , știind că $\overline{xyz} + \overline{yzx} + \overline{zxy} = 555$.

6. Trei saci conțin împreună 147,7 kg de mere. Din fiecare sac se scoate aceeași cantitate de mere. Acum, în cei trei saci se află 29 kg, 28,2 kg și, respectiv, 30,5 kg de mere.

1p a) Ce cantitate de mere s-a scos din fiecare sac?

1p b) Ce cantitate de mere conținea inițial fiecare sac?

1p 7. Câte plăci de gresie în formă de pătrat cu latura de 40 cm sunt necesare pentru a acoperi podeaua unei bucătării dreptunghiulare cu dimensiunile 1,6 m și 4 m?

1p 8. Aflați x , știind că $9^x + 9^{x+1} = 270$.

ALGEBRĂ

Capitolul 1 MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

Lecția 1. Descriere, notații, reprezentări. Mulțimi numerice și nenumerice. Relația dintre un element și o mulțime

1 CE TREBUIE SĂ REȚIN

Noțiunea de **mulțime** este o noțiune primară, adică nu are o definiție riguroasă, dar poate fi descrisă ca o colecție de obiecte bine determinate și distincte, numite **elementele mulțimii**.

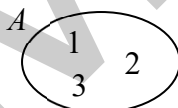
Mulțimile se notează cu litere mari, iar elementele se notează cu litere mici.

O mulțime poate fi definită:

- **sintetic**, enumerând elementele sale: $A = \{1, 2, 4, 8\}$;
- **analitic**, indicând o proprietate comună pe care o au elementele sale:

$$A = \{x \mid x \text{ pătrat perfect de două cifre}\};$$

- cu **diagrame Venn–Euler**:



Dacă un element x face parte din mulțimea A , atunci spunem că **aparține** mulțimii și scriem $x \in A$. În caz contrar, spunem că nu aparține mulțimii și scriem $x \notin A$.

Mulțimea care nu are niciun element se numește mulțime **vidă**, notată \emptyset .

Mulțimea care are toate elementele numere naturale se numește **mulțimea numerelor naturale**, notată $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Mulțimea numerelor naturale nenule este $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Numărul de elemente al unei mulțimi A se numește **cardinalul** mulțimii, notat $\text{card } A$ sau $|A|$.

Într-o mulțime, fiecare element apare o singură dată; elementele mulțimii pot fi scrise în orice ordine.

2 SĂ ÎNVĂȚĂM ÎMPREUNĂ

1. Scrieți mulțimile formate din literele cuvintelor: *algebra*, *trigonometrie*, *creion*, *paralelipiped*.

Soluție: Vom fi atenți ca elementele mulțimii să fie distincte; $\{a, l, g, e, b, r\}$, $\{t, r, i, g, o, n, m, e\}$, $\{c, r, e, i, o, n\}$, $\{p, a, r, l, e, i, d\}$.

2. Scrieți fiecare dintre următoarele mulțimi, enumerând elementele sale:

$$A = \{x \mid x \text{ cifră nenulă pară}\};$$

$$B = \{x \mid x \text{ cub perfect de două cifre}\};$$

$$C = \{x \mid 2x + 5 \leq 15, x \text{ număr natural}\};$$

$$D = \{x \mid x \text{ este ultima cifră a unui pătrat perfect}\};$$

$$E = \{x \mid 2x = 5, x \text{ număr natural}\}.$$

Soluție: $A = \{2, 4, 6, 8\}$; $B = \{27, 64\}$; $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; $D = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$, $E = \emptyset$.

3. Care dintre următoarele mulțimi nu sunt scrise corect? Justificați răspunsul.

$$A = \{1, 2, 3, 2^2, 5^0\}; B = \{x, y, x^{2^0}\}; C = \{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4\}$$

Soluție: $A = \{1, 2, 3, 4, 1\}$ nu este scrisă corect, deoarece elementul 1 apare de două ori; $B = \{x, y, x\}$ nu este scrisă corect, deoarece elementul x apare de două ori; $C = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ este scrisă corect.

4. Determinați cardinalul mulțimilor:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3\}; B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \text{ pătrat perfect și } x \leq 75\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x \leq 8\}.$$

Soluție: $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $\text{card } A = 4$;

$B = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2\}$, $\text{card } B = 8$;

$C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\text{card } C = 6$.

5. Fie mulțimea $A = \{a \in \mathbb{N} \mid 1 < a \leq 5\}$. Determinați mulțimile:

a) A ;

b) $B = \{b \in \mathbb{N} \mid b = 2a, a \in A\}$;

c) $C = \{c \in \mathbb{N} \mid c = b + 1, b \in B\}$;

d) $D = \{d \in \mathbb{N} \mid d = a^2 + 1, a \in A\}$;

e) $E = \{e \in \mathbb{N} \mid e = d - 10, d \in A\}$.

Soluție: a) $A = \{2, 3, 4, 5\}$.

b) $B = \{2 \cdot 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 4, 2 \cdot 5\} = \{4, 6, 8, 10\}$.

c) $C = \{4 + 1, 6 + 1, 8 + 1, 10 + 1\} = \{5, 7, 9, 11\}$;

d) $D = \{5, 10, 17, 26\}$;

e) $E = \{0, 7, 16\}$.

6. Precizați elementele mulțimilor:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 40 \text{ și } x \text{ dă restul } 4 \text{ la împărțirea cu } 7\}$;

b) $B = \{\overline{xyz} \mid \overline{xyz}$ este un număr natural de trei cifre, pătrat perfect, divizibil cu 5 $\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x : 10 \text{ și } 2(x + 2) \leq 100\}$.

Soluție: a) Aplicând teorema împărțirii cu rest, avem $x = 7 \cdot c + 4$, cu $x < 40$. Observăm că relația este verificată pentru $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Deci x poate fi 4, 11, 18, 25, 32, 39, adică $A = \{4, 11, 18, 25, 32, 39\}$.

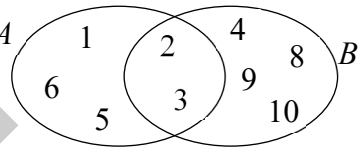
b) $\overline{xyz} = \overline{ab^2}$ cu $b \in \{0, 5\}$. Numerele care verifică relația sunt $10^2, 15^2, 20^2, 25^2, 30^2$, deci $B = \{100, 225, 400, 625, 900\}$.

c) Deoarece x este divizibil cu 10, observăm că relația este verificată pentru 10, 20, 30, 40, deci $C = \{10, 20, 30, 40\}$.

7. Determinați cardinalul mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x + 1 \leq 2024\}$.

Soluție: Deoarece $3x + 1 \leq 2024 \Rightarrow 3x \leq 2023 \Rightarrow x \in \{0, 1, \dots, 674\}$, deci $\text{card } A = 675$.

8. În figura alăturată sunt reprezentate mulțimile A și B .



a) Scrieți cele două mulțimi.

b) Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

P_1 : „ $2 \in A$ și $2 \in B$ ”;

P_2 : „ $6 \in A$ ”;

P_3 : „ $5 \notin B$ ”;

P_4 : „ $10 \in B$ ”;

P_5 : „ $3 \notin A$ ”;

P_6 : „ $9 \in A$ și $9 \in B$ ”;

P_7 : „ $2 \notin A$ ”;

P_8 : „ $6 \notin B$ ”.

Soluție: a) $A = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, $B = \{2, 3, 4, 8, 9, 10\}$.

b) P_1 : A; P_2 : A; P_3 : A; P_4 : A; P_5 : F; P_6 : F; P_7 : F; P_8 : A.

9. Fie mulțimea $A = \{12, 13, 14, \dots, 56\}$. Scrieți, enumerând elementele, următoarele mulțimi:

a) $B = \{x \mid x \text{ succesor al elementelor mulțimii } A\}$;

b) $C = \{x \mid x \text{ pătrat perfect din mulțimea } A\}$;

c) $D = \{x \mid x \in A \text{ și } x : 9\}$;

d) $E = \{x \mid x \in A \text{ și } x = 12n + 5, n \in \mathbb{N}\}$.

Soluție: a) $B = \{13, 14, 15, \dots, 57\}$; b) $C = \{16, 25, 36, 49\}$;

c) $D = \{18, 27, 36, 45, 54\}$;

d) Trebuie să determinăm elementele mulțimii A care sunt de forma $12n + 5$, $n \in \mathbb{N}$. Atunci $12 \cdot 1 + 5 = 17 \in A$, $12 \cdot 2 + 5 = 29 \in A$, $12 \cdot 3 + 5 = 41 \in A$, $12 \cdot 4 + 5 = 53 \in A$, deci $E = \{17, 29, 41, 53\}$.

3 CUM APLICĂ CE AM ÎNVĂȚAT

Standard minimal

1. Enumerați elementele mulțimilor:

$$A = \{x \mid x \text{ literă a cuvântului } \textit{analog}\};$$

$$B = \{x \mid x \text{ cifră impară}\};$$

$$C = \{x \mid x \text{ divizor al numărului } 27\};$$

$$D = \{x \mid x \text{ divizor propriu al lui } 12\}.$$

2. Enumerați elementele mulțimilor:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 12\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 30 \text{ și } x \text{ multiplu de } 5\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 3 \leq 3x < 27\};$$

$$D = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3p - 2, p \in \mathbb{N}, p \leq 5\}.$$

3. Determinați cardinalul mulțimilor:

$$A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 20\};$$

$$B = \{5, 10, 15, 20, \dots, 100\};$$

$$C = \{14, 15, 16, \dots, 83\};$$

$$D = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \leq 50\}.$$

4. Se consideră mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Enumerați elementele mulțimilor:

$$A = \{a \in M \mid a \text{ pătrat perfect}\};$$

$$B = \{b \in M \mid b^2 \leq 40\};$$

$$C = \{c \in \mathbb{N} \mid c = x + 1, x \in M\};$$

$$D = \{d \in \mathbb{N} \mid d = 2^{x-1}, x \in M\}.$$

5. Se consideră mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10 \text{ și } x > 3\}$. Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) P_1 : „ $10 \in A$ ”;

b) P_2 : „ $2 \in A$ ”;

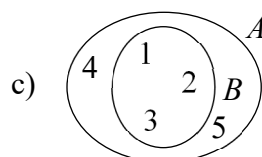
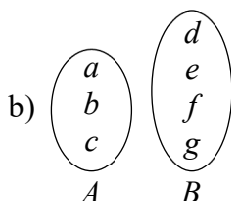
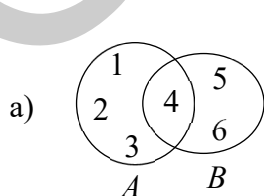
c) P_3 : „ $3 \notin A$ ”;

d) P_4 : „ $4 \notin A$ ”;

e) P_5 : „ $\text{card } A = 7$ ”;

f) P_6 : „ $8 \in A$ ”.

6. Determinați mulțimile A și B din diagramele:



Standard consolidare

7. Determinați elementele mulțimilor:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid 3^n + 3^{n+1} \text{ este pătrat perfect}\};$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid 11 \cdot 4^n + 4^{n+2} \text{ este cub perfect}\};$$

$$C = \{n \in \mathbb{N} \mid 3x + 4 \leq 100 \text{ și restul împărțirii lui } x \text{ la } 8 \text{ este } 5\}.$$

8. Scrieți, cu ajutorul unei proprietăți caracteristice a elementelor, mulțimile:

$$A = \{2, 4, 6, 8\};$$

$$B = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots, 20^2\};$$

$$C = \{0, 1, 3, 7, 15, 31\};$$

$$D = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right\}.$$

9. Determinați mulțimile:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{ab}, x \text{ este pătrat și cub perfect}\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{ab1} \text{ și } x \text{ este pătrat perfect}\}.$$

10. Fie mulțimea $A = \{xyz \mid x \text{ cifră pară}, y = x - 3, z = 2y\}$. Determinați cardinalul mulțimii A .

11. Determinați elementele mulțimilor:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{2aa} \text{ și } 3 \mid x\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{a2b} \text{ și } 5 \mid x\}.$$

12. Determinați elementele mulțimilor:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 8\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 1 \mid 15\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 25 \text{ și } 7 \mid x\};$$

$$D = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x + 5 \leq 24 \text{ și } x \text{ număr par}\}.$$

13. Scrieți mulțimea numerelor naturale care, prin împărțirea la 7, dau câtul 4.

14. Se consideră mulțimile $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ și $B = \{x \mid x = 2^a - 1, a \in A\}$.

a) Scrieți elementele mulțimii B .

b) Câte elemente aparțin atât mulțimii A , cât și mulțimii B ?

15. Se consideră mulțimea $A = \{0, 4, 8, 12, 16, \dots, 84\}$.

a) Scrieți mulțimea A enunțând o proprietate a elementelor sale.

b) Determinați card A .

c) Scrieți elementele mulțimii A care sunt divizibile cu 5.

16. Se consideră mulțimea:

$$A = \{x \mid x = \overline{abc} \text{ cu } a + b + c = 5, \text{ unde } a, b, c \text{ sunt cifre în baza } 10\}.$$

- a) Dați trei exemple de elemente care aparțin mulțimii A .
b) Câte elemente din A se divid cu 9?

17. Determinați elementele mulțimilor:

$$A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{3}{x} \in \mathbb{N}\right\}, B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{5}{2x-1} \in \mathbb{N}\right\}.$$

18. Determinați mulțimile A și B , dacă:

$$A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{ab} \text{ și } \frac{x+21}{5} \in \mathbb{N}\right\}, B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{ab} \text{ și } \frac{x+15}{7} \in \mathbb{N}\right\}.$$

19. Se consideră mulțimile:

$$A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{7} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}\right\}, B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{2}{3} < \frac{5}{x} < \frac{3}{2}\right\}.$$

Arătați că $\text{card } A = \text{card } B$.

Excelență (aprofundare)

20. Determinați elementele mulțimii:

$$A = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} + \overline{ba} = 77, a \text{ și } b \text{ cifre nenule în baza } 10\}.$$

21. Se consideră mulțimile:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2^{2^n}, n \in \mathbb{N}^*, x \leq 4\},$$

$$B = \{y \in \mathbb{N} \mid y^2 = x, x \in A\}$$

$$\text{și } C = \{z \in \mathbb{N} \mid z^3 = y, y \in B\}.$$

Determinați mulțimile A, B, C .

22. Determinați cardinalul mulțimilor:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^{2024} \leq x \leq 2^{2025}\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2^{2023}\}.$$